ALMATY MATH BATTLES 2025

Решения первого тура AMB, Senior

№1. Докажите, что $a^3 + 5b^3 \neq 2025$ при целых a и b.

Решение. Рассмотрим обе стороны по $\pmod 5$. Выходит, что $a = 5c \implies a^3 = 125c^3$.

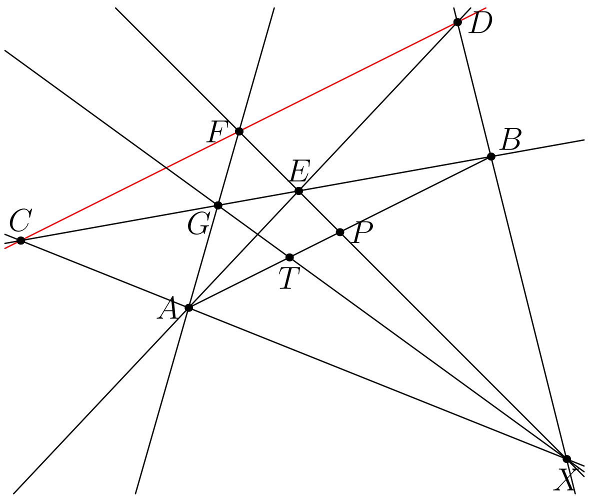
Равенство переписывается как $125c^3 + 5b^3 = 2025 \iff 25c^3 + b^3 = 405$. Опять рассмотрев обе стороны по $\pmod 5$ получаем, что $b = 5d \implies b^3 = 125d^3$.

Равенство переписывается как $25c^3 + 125d^3 = 405 \iff 5c^3 + 25d^3 = 81$. Но тогда правая часть не делиться на 5 – противоречие.

№2. На плоскости дан отрезок фиксированной длины, и прямая параллельная ему. Можно ли проведя 7 прямых и отмечая точки пересечения прямых отметить на отрезке точку делящую отрезок в отношении 1 к 2?

Ответ: Да.

Решение.



AB – данный отрезок, а красная прямая – прямая параллельная данному отрезку.

Возьмем произвольную точку X и проведем прямые AX, BX, AD, BC, XE, AF, XG.

Мы хотим доказать, что T делит AB в отношении 1 к 2.

Применим теорему Менелая для треугольника AFP и секущей GX. $\frac{PT}{TA} \cdot \frac{AG}{GF} \cdot \frac{FX}{XP} = 1$. Из подобий следует, что $\frac{AG}{GF} = 2\frac{XP}{FX}$, что значит $\frac{PT}{TA} = \frac{1}{2} \implies \frac{AT}{TB} = \frac{1}{2}$

№3. Существуют ли такие натуральные числа a, b большие 2025, что для любого натурального c, являющегося полным квадратом, числа a, b, c не являются сторонами некоторого треугольника?

Ответ: Да, существуют. Например $a = 2025^2 + 2027$, $b = 2026$.

Решение. БОО предположим, что $a > b$. Тогда неравенство треугольника можно записать как $a - b < c < a + b$. Известно, что между $n^2 + 1$ и $n^2 + 2n$ не находятся ни один квадрат, так что если взять $n = 2025$, то между числами $2025^2 + 1 = a - b$ и $2025^2 + 4050 > a + b$ не будет квадратов.

№4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, что $\angle ADB = \angle BDC$. На стороне AD

выбрана точка E, что выполнено

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Докажите, что $\angle EBA = \angle DCB$.

Решение. Пусть точка F лежит на стороне CD так, что $DE = DF$. Тогда, $\triangle DEB = \triangle DFB$. Поэтому, $BE = BF$ и $\angle BEA = \angle BFC$

Значит, нам достаточно доказать, что $\triangle AEB \sim \triangle BFC$.

И действительно, $AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE \iff AE(CD - DE) = BE \cdot BF \iff AE(CD - DF) = BE \cdot BF \iff AE \cdot FC = BE \cdot BF \iff \frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC}$, что и требовалось доказать.

№5. 8 муравьев поместили на стороны куба со стороной единичной длины. Докажите, что найдется пара муравьев, что расстояние между ними не не более 1.

Решение. Каждому муравью сопоставим вершину куба находящуюся на расстоянии не более $\frac{1}{2}$ от него, если таких несколько, то выберем любую из них.

Если 2 муравья оказались сопоставлены одной и той же вершине, то расстояние между ними не более $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ – доказано.

Если все муравьи сопоставлены разным вершинам, то выберем муравья который расположен на наибольшем расстоянии от своей вершины, назовем это расстояние x. Пусть этот муравей находится на стороне AB, и его вершина – A. Рассмотрим муравья, которому сопоставлена вершина B, пусть расстояние от него до B – y, тогда расстояние между этими двумя муравьями будет $1 - x + y \leq 1$.

№6. Дано $n > 2$ натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n < 2^n - 1$. Докажите что найдется последовательность $\{e_i\}_{i=1}^n$ из чисел множества $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, такая что $e_1a_1 + e_2a_2 + \cdots + e_na_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 0$ и не все e_i нули.

Решение. Задача неверна, контрпример – $n = 3, (1, 2, 4)$. Очевидно, что e_1 должен быть кратен 2, так как иначе сумма нечентая.

Если $e_1 = 0$, то единственный вариант $0 = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 0$, но тогда $0 - 2 + 1 \neq 0$.

Если $e_1 = 2$, тогда e_2 должен быть нечетным. Если $e_2 = 1$, то $e_3 = -3$ – противоречие. Если $e_2 = -1$, то $e_3 = -1$, но тогда $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \neq 0$.

Решения второго тура AMB, Senior

№1. Даны 2 квадратных трехчлена: $f(x) = ax^2 + bx + 2c$ и $g(x) = c(x-1)^2$, где $0 < a < c$. Докажите что существуют такие действительные числа k и l, что выполняются следующие неравенства:

$$g(x) + kx + l \geq f(x) \geq kx + l.$$

Решение. Неравенство можно переписать как

$$f(x) \geq kx + l \geq f(x) - g(x).$$

То есть прямая $kx + l$ должна находиться не выше, чем парабола $f(x)$ и не ниже, чем парабола $f(x) - g(x)$. Так как

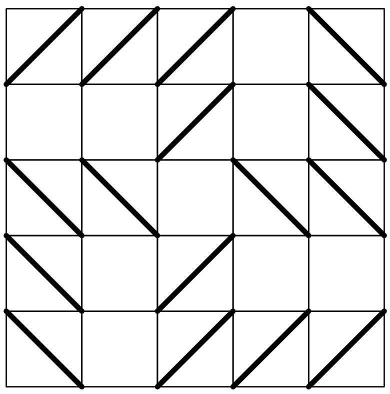
$$f(x) = f(x) - g(x) \iff g(x) = 0 \iff x = 1.$$

Эти две параболы касаются в одной точке с $x = 1$. Если мы проведем в этой точке касательную к этим двум параболам (они будут идентичными так как параболы касаются), то она будет не выше, чем $f(x)$ (так как эта парабола с рогами вверх), и не ниже, чем $f(x) - g(x)$ (так как эта парабола с рогами вниз).

№2. Дан клетчатый квадрат 5×5 со стороной клетки равной 1. Какое наибольшее количество диагоналей можно провести в маленьких квадратах, чтобы они не имели общих точек.

Ответ: 16.

Решение.

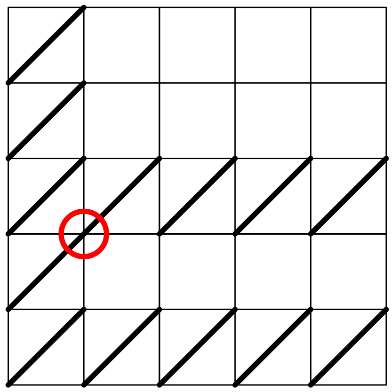


Предположим, что существует пример на хотя-бы 17 диагоналей. Обозначит количество диагоналей в k-той строке за a_k.

Докажем, что $a_k + a_{k+1} \leq 6$. Пойдем от противного, пусть их там хотя-бы 7, тогда можно заметить, что каждая такая диагональ занимает ровно один узел таблички между этими двумя строками. Тогда по принципу Дирихле найдется хотя-бы 2 диагонали, которые имеют общую вершину – противоречие.

Теперь предположим, что $a_1 \leq 4$, тогда общее количество диагоналей $\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) \leq 4 + 6 + 6 = 16 < 17$ – противоречие, значит $a_1 = 5$. Аналогичным образом получаем, что $a_3 = a_5 = 5$.

Также поступим со столбцами, значит, что в первом и третьем столбце, а также в первой строке все клетки заняты, такое возможно только при



но в нем 2 диагонали имеют общую точку – противоречие.

№3. Артемий начертил отрезок длины L. Около отрезка Мирас отметил 400 точек таким образом, что выполняются следующие два условия:

1) Для каждой точки расстояние до отрезка не больше 10 см (если невозможно опустить перпендикуляр для определения расстояния мы считаем расстояние до ближайшего края отрезка).

2) Расстояние между любыми двумя точками не менее 20 см.

Докажите, что $L > 3000$ см.

Решение. Начертим прямоугольник длиной $L+40$ и шириной 40 вокруг отрезка. Площадь этого прямоугольника $(L + 40) \cdot 40$.

Теперь вокруг каждой точки начертим окружность радиусом 10. Эти окружности не пересекаются и все они находятся внутри прямоугольника. Таким образом площадь всех окружностей меньне больше площади прямоугольника.

$$400 \cdot \pi \cdot 10^2 < (L + 40) \cdot 40$$
$$\iff 40000 \cdot \pi < (L + 40) \cdot 40 \implies 1000 \cdot \pi < L + 40$$
$$\iff L > 3000.$$

№4. У нас имеется $3n$ палок длинами $\left(\frac{3}{2}\right)^1, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \ldots, \left(\frac{3}{2}\right)^n$ – по 3 палки каждой. Сколькими способами можно выбрать 3 из них так, чтобы из них можно было собрать треугольник? (Палки одной длины считаются идентичными).

Ответ: $\frac{(n+6)(n-1)}{2}$.

Решение. Допустим имеем три палки разной длины. Можно заметить что из них возможно составить треугольник только если их длины идут подряд: $\left(\frac{3}{2}\right)^i$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{i+1}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{i+1}$. Таких можно выбрать $n-2$ способами.

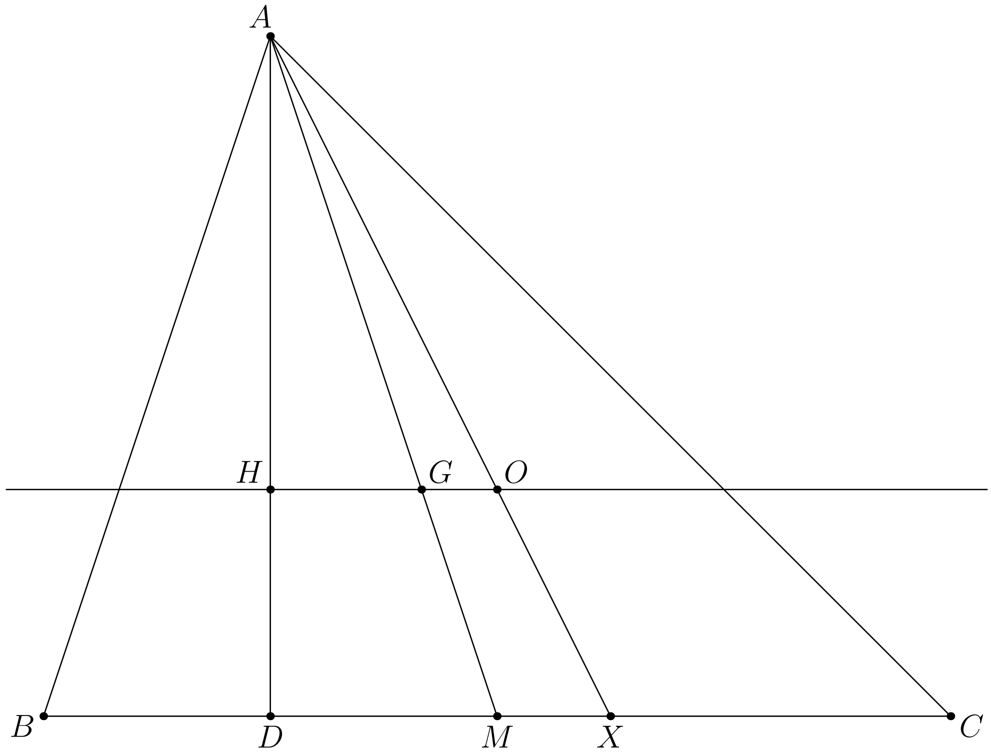
Теперь, если две палки совпадают по длине, имея длину $\left(\frac{3}{2}\right)^i$, то третья палка не больше $\left(\frac{3}{2}\right)^{i+1}$. Выбрать палки чтобы третья была меньше по длине ровно $\frac{n(n-1)}{2}$ способов, а чтобы третья была не меньше ровно $n+n-1$ способов.

Соотвественно всего способов $3(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n+6)(n-1)}{2}$

№5. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC, который обладает следующим свойством: $\operatorname{tg}\angle B+\operatorname{tg}\angle C=2\operatorname{tg}\angle A$. Диаметр описанной окружности треугольника ABC проходящий через A пересекает BC в точке X. O – центр описанной окружности треугольника ABC. Найдите соотношение $\frac{AO}{XO}$.

Ответ: 2.

Решение.



$$\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=2\operatorname{tg}A=2\operatorname{tg}(180^\circ-B-C)=-2\operatorname{tg}(B+C)=\frac{2(\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C)}{\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C-1}$$

$$1=\frac{2}{\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C-1}$$

$$\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C-1=2$$

$$\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C=3$$

Проведем прямую Эйлера – прямую, соединяющую центр описанной окружности – O, точку пересечения медиан – G и точку пересечения высот – H. Заметим теперь, что из этого тригонометрического равенства следует параллельность прямой Эйлера и стороны – BC.

Имеем

$$AD = BD \cdot \operatorname{tg} B, \qquad HD = \frac{BD}{\operatorname{tg} C} \implies \frac{AD}{HD} = \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 3 = \frac{AM}{GM}.$$

Следовательно, прямая HG параллельна стороне BC, а также

$$\frac{AO}{XO} = \frac{AG}{MG} = 2.$$

№6. Существует ли такое иррациональное число $\alpha > 1$, что

$$\lfloor \alpha^n \rfloor \equiv 0 \pmod{2025} \text{ для всех } n \geq 1.$$

Ответ: Да.

Решение. Пусть $\alpha > 1$ и $0 < \beta < 1$ – корни уравнения $x^2 - 5051x + 2025 = 0$.

Заметим, что $\lfloor \alpha^n \rfloor = \alpha^n + \beta^n - 1$.

Обозначим $x_n = \alpha^n + \beta^n$ для всех неотрицательных целых n. Легко проверить, что

$$x_n = 5051x_{n-1} - 2025x_{n-2} \equiv x_{n-1} \pmod{2025},$$

и, поскольку $x_1 = 5051 \equiv 1 \pmod{2025}$, получаем, что $x_n \equiv 1 \pmod{2025}$ для всех n.

Таким образом, α удовлетворяет условию задачи.

ALMATY MATH BATTLES 2025

Решения третьего тура AMB, Senior

№1. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. На сторонах AB и AD взяты точки M и N соответственно так, что $MN = BM + DN$. Известно, что $BC = CD$ и $\angle BAD = 30^\circ$. Найдите $\angle MCN$.

Ответ: $\angle MCN = 75^\circ$.

Решение. Пусть T – точка на MN, такая что $BM = MT, NT = ND$.

Простым счетом углов, $\angle BTD = 105^\circ, \angle C = 150^\circ$. Ну а так как $BC = CD$, C – Центр окружности описанной вокруг $\triangle BTD$.

Далее, получаем $BC = CT = CD$, а значит $\triangle MBC = \triangle MTC, \triangle TCN = \triangle DCN$, из чего следует $\angle MCN = \frac{\angle BCD}{2} = 75^\circ$.

№2. На доске 300×300 расставлены ладьи, они бьют всю доску. При этом, каждая ладья бьет не более чем одну другую ладью. При каком наименьшем k можно заведомо утверждать, что в каждом квадрате $k \times k$ стоит хотя бы одна ладья.

Ответ: 201.

Решение. Пример: Поставим ладей в клетки с координатами $(i, 2i-1)$ и $(i, 2i)$ при $1 \le i \le 150$. Тогда в квадрате 200×200, примыкающем к левому нижнему углу, не найдется ни одной ладьи.

Оценка: Предположим, что для некоторой расстановки людей нашелся квадрат 201×201, в котором нет ни одной ладьи. Переставим строки и столбцы доски таким образом, чтобы это был левый нижний квадрат.

Назовем правый от этого квадрата прямоугольник 201×99 частью B, а верхний прямоугольник 99×201 частью A.

Рассмотрим часть A сверху от этого квадрата. В этой части 99 строк, в каждой из которых не более двух ладей.

Значит, всего в части A не более 198 ладей, а поскольку эта часть занимает 201 столбец, существует столбец, пересекающий часть A, в котором не стоит ни одной ладьи. Аналогично существует строка, пересекающая часть B, в которой нет ни одной ладьи. Тогда клетка на пересечении этого столбца и этой строки не бьется ладьями, что противоречит условию.

№3. Даны действительные числа a, b, что $2^n \cdot a + b$ является полным квадратом для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $a = 0$.

Решение. Пусть $2^n \cdot a + b = x_n^2$. Заметим, что при $a \neq 0$ число x_n может быть сколько угодно большим. Рассмотрим $4(2^n \cdot a + b) = 2^{n+2} \cdot a + 4b = 4x_n^2$, значит, что $(2x_n)^2 - x_{n+2}^2 = 3b$, но расстояние между двумя неодинаковыми квадратами не может быть константой для достаточно больших квадратов – противоречие.

№4. Пусть $f(x)$ – многочлен степени n. Какое наибольшее количество пар различных действительных чисел (a, b) может быть, таких что $f(a) = b$ и $f(b) = a$?

Ответ: $\frac{n(n-1)}{2}$.

Решение. Рассмотрим многочлен $f(f(x)) - x = (f(x) - x)Q(x)$. Имеем, что $\deg(Q) = n^2 - n$. Поэтому таких пар не более чем $\frac{n(n-1)}{2}$. В качестве примера $f(x) = C(x-1)(x-2)...(x-n)$ подходит для достаточно большого C.

№5. Для выпуклого четырехугольника $ABCD$ обозначим $X = AB + BC + CD + DA$ и $Y = AC + BD$. Определите множество возможных значений $\frac{X}{Y}$.

(Требуется доказать что значения вне множества не достижимы и доказать что значения из множества можно получить)

Ответ: $1 < \frac{X}{Y} < 2$.

Решение. Пусть у нас есть выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD, пересекающимися в точке E.

Чтобы доказать нижнюю границу, заметим, что по неравенству треугольника: $AB + BC > AC$ и $AD + DC > AC$ следовательно, $X = AB + BC + AD + DC > 2AC$.

Аналогично, $X > 2BD$, значит, $2X > 2AC + 2BD = 2Y$, что даёт $X > Y$.

Чтобы доказать верхнюю границу, снова воспользуемся неравенством треугольника:

$$AE + EB > AB$$

$$CE + BE > BC$$

$$AE + ED > AD$$

$$CE + ED > CD$$

Сложив эти неравенства, получаем:

$$2(AE + EC + BE + ED) > AB + BC + AD + CD = X.$$

Так как $ABCD$ – выпуклый, точка E находится внутри четырёхугольника, поэтому $AE + EC = AC$ и $BE + ED = BD$.

Таким образом, $2(AC + BD) = Y > X$.

Чтобы достичь каждого вещественного значения в этом диапазоне, сначала рассмотрим квадрат $ABCD$. В этом случае отношение $\frac{X}{Y} = \sqrt{2}$.

Теперь предположим, что у нас есть прямоугольник, где $AB = CD = 1$ и $BC = AD = x$, где $0 < x \leq 1$. Когда x стремится к 0 (то есть наш прямоугольник становится всё тоньше), отношение $\frac{X}{Y}$ становится сколь угодно близким к 1. Таким образом, мы получаем все значения $\frac{X}{Y} \in (1, \sqrt{2}]$.

Чтобы достичь других значений, рассматриваем четырёхугольник, в котором $AB = BC = CD = DA = 1$ и угол $\theta = \angle ABE$ изменяется от 45° до 0°.

№6. Дано натуральное число n. Найдите все функции $f : \{1, 2, ..., n, n+1\} \mapsto \{1, 2, ..., n\}$, что выполняется

$f(n+1) = f(1)$

$f(f(f(k))) + 1 - f(k+1)$ делится на n для всех $k = 1, 2, ..., n$.

Решение. Рассмотрим f как функцию в полной системе вычетов $\mathbb{Z}_n$.

Если f имеет неподвижную точку k, то $k+1$ также является неподвижной точкой. Так что f является тождеством.

Далее, каждый цикл имеет длину не менее 2. Рассмотрим наименьший цикл $A_0 = \{a_1, \ldots, a_k\}$ с $k \geq 2$. Тогда $1 + a_{i+3} = f(1 + a_i)$, так что f является биекцией на множестве $A_1 = \{1 + a_i \mid i = 1, 2, ..., k\}$.

Заметим, что A_1 имеет цикл с длиной не более k, поэтому он является наименьшим. Продолжая эти рассуждения, получаем, что все циклы имеют длину k и являются арифметической прогрессией.

Так что $f(k) = k + a \pmod{n}$. Так что $2a$ кратно n. Для нечетного n имеем $f(k) = k \pmod{n}$ и для $n = 2s$: $f(k) = k \pmod{n}$ и $f(k) = k + s \pmod{n}$.

ALMATY MATH BATTLES 2025

Решения четвертого тура AMB, Senior

Капитанский бой. Даны двухзначные простые числа p, q, r, s. В их записи все ненулевые цифры кроме 5. Найдите $p+q+r+s$.

Ответ: 220.

№1. Даны n простых чисел – $p_1, p_2, ..., p_n$. Рассмотрим многочлен:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

где a_i произведение первых i данных простых чисел. Для какого n этот многочлен имеет целочисленный корень?

Решение. Если $n \geq 2$, то про критерию Эйзенштейна P неразложим, значит у него нет целого корня.

Для $n = 1$, у многочлена $P(x) = x + p_1$ есть корень $x = -p_1$.

№2. Квадратный трехчлен $P(x)$, имеющий два вещественных корня, для всех x удовлетворяет неравенству $P(x^3 + x) \geq P(x^2 + 1)$. Найдите сумму корней трехчлена $P(x)$.

Ответ: 4.

Решение. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$. Заметим, что $a > 0$, так как в противном случае при достаточно большом x, $P(x)$ будет убывать, а $P(x^3+x) \geq P(x^2+1)$. Тогда если x_1, x_2 – корни, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Заметим, что $P(x) = a(x - \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$. Тогда если x_0 точка в которой $P(x)$ минимален, то $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$. Покажем, что $x_0 = 2$. Пусть это не так, и $y \neq 2$ минимальная точка. Тогда $x^3 + x = y, x \neq 1, x^3 + x \neq x^2 + 1 \implies P(y) = P(x^3 + x) \geq P(x^2 + 1)$, что невозможно. Значит $x_0 = 2 \implies x_1 + x_2 = 4$

№3. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $ABDE$ и $ACDF$ – вписанные четырехугольники. Прямая AD пересекает описанную окружность ABC снова в точке P. Пусть Q – точка симметричная P относительно BC. Докажите что Q лежит на описанной окружности треугольника AEF.

Решение. Так как Q является симметричной точкой P относительно BC верно равенство следуйщих углов

$$\begin{aligned} \angle DBQ &= \angle DBP = \angle PBC \\ &= \angle PAC = \angle DAE \\ &= \angle DBE \end{aligned}$$

Из этого следует что B, Q, E лежат на одной прямой. Анологично получаем что

C, Q, F лежат на одной прямой. Значит

$$\angle FQE = \angle BQC = \angle BPC = 180^\circ - \angle A$$

Из за этого не сложно понять что $AEQF$ вписанный.

№4. Дана доска 8×8. Две клетки считаются касающимися если они имеют хотя бы одну общую вершину. Возможно ли, чтобы король, начиная с некоторой клетки, обошёл все клетки ровно один раз так, что каждый его ход (кроме первого) приводил в клетку, соприкасающуюся с чётным числом уже посещенных клеток?

Ответ: Обойти все клетки таким образом невозможно.

Решение. Предположим противное – что существует путь, удовлетворяющий условиям задачи. Очевидно, что первый ход совершается в клетку, которая соприкасается ровно с одной уже посещенной клеткой, а именно с начальной.

Рассмотрим сумму количества уже посещённых соприкасающихся клеток по всем ходам. Первый ход добавляет 1 к этой сумме. В дальнейшем каждый ход совершается в клетку, которая касается чётного числа уже посещённых клеток. Таким образом, итоговая сумма оказывается нечётной.

С другой стороны, каждая пара соприкасающихся клеток учитывается в этой сумме ровно один раз – когда посещается вторая клетка из этой пары. Поэтому сумма равна общему числу таких пар. Однако это число чётное, так как количество горизонтальных и вертикальных пар совпадает, как и количество диагональных пар.

Получаем противоречие, следовательно, такого пути не существует.

№5. Пусть T_n – наименьшее натуральное число, такое, что

$$n \mid 1 + 2 + 3 + \cdots + T_n = \sum_{i=1}^{T_n} i.$$

Найдите все такие m, что $m \geq T_m$.

Ответ: Все натуральные числа m, кроме степеней двойки.

Решение. Пусть $m = 2^a$, тогда очевидно, что $T_m > m$.

Рассмотрим случай, когда $m = 2^a(2k+1)$, где ≥ 1.

Рассмотрим множество $S = \{2^{a+1}, 2 \cdot 2^{a+1}, \ldots, k \cdot 2^{a+1}\}$. Заметим, что каждый элемент этого множества строго меньше, чем m.

Легко проверить, что по модулю $(2k+1)$ элементы множества S различны.

По $\pmod{2k+1}$ в каждом наборе из элементов вида $(x, 2k+1-x)$ максимум один элемент принадлежит S.

Вывод: В каждом наборе из множества $\{(1, 2k), (2, 2k-1), \ldots, (k, k+1)\}$ есть ровно один элемент из S. Тогда существует $1 \leq b \leq k$ такой, что либо

$$b \cdot 2^{a+1} - 1 \equiv 0 \pmod{2k+1},$$

либо
$$b \cdot 2^{a+1} + 1 \equiv 0 \pmod{2k+1}.$$

Случай 1: $b \cdot 2^{a+1} - 1 \equiv 0 \pmod{2k+1}$.

Очевидно, что $\frac{(b \cdot 2^{a+1}-1)(b \cdot 2^{a+1})}{2}$ делится на $m = 2^a(2k+1)$, следовательно,
$$T_m \leq b \cdot 2^{a+1} - 1 \leq 2^a(2k+1) = m.$$

Случай 2: $b \cdot 2^{a+1} - 1 \equiv 0 \pmod{2k+1}$.

Очевидно, что $\frac{(b \cdot 2^{a+1})(b \cdot 2^{a+1}+1)}{2}$ делится на $m = 2^a(2k+1)$, следовательно,
$$T_m \leq b \cdot 2^{a+1} \leq 2^a(2k+1) = m.$$

Таким образом, ответ – все числа m, кроме степеней двойки.

№6. 110 команд играют в турнир в 6 раундов. В каждом раунде они разделяются на 55 пар и каждая пара играет в игру. Известно, что каждая пара сыграла не больше одной игры. Докажите что мы можем найти 19 команд, среди которых нет двух команд которые сыграли между собой.

Решение. Докажем индукцией что если $6n+2$ или больше команд сыграли по 6 раундов, то мы можем найти $n+1$ команд, среди которых нет двух команд которые сыграли между собой.

База $n = 1$ очевидна.

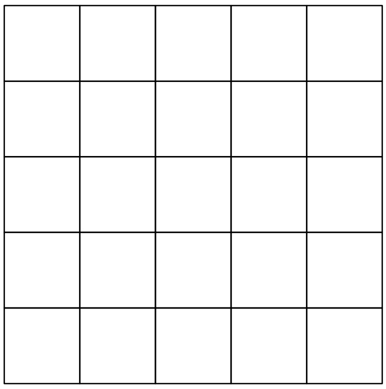
Пусть мы доказали для $n < m$, докажем для $n = m$.

Возьмём произвольную команду t_1. Пусть, T_1 – команды, с которыми играла t_1. Поскольку в T_1 всего 6 команд, мы можем найти новую команду t_2, которая играла с какой-то командой из T_1. Пусть, T_2 – новые команды, с которыми играла t_2. Для $i > 2$ будем брать такую команду t_i, которая не играла с t_1,$t_2, \ldots, t_{i-1}$, но играла с какой-то командой из T_1 или T_2 или $\ldots$ или T_{i-1} и возьмём за T_i – новые команды, с которыми играла t_i. Если мы смогли так найти t_1,$t_2, \ldots, t_m$, то мы пока что взяли максимум $6m+1$ команду, тогда мы сможем взять t_{m+1} и t_i не играли между собой.

Теперь предположим, что мы не смогли найти все такие t_i, т.е. для какого-то r мы смогли найти t_r, но не смогли найти t_{r+1}. Тогда мы пока что нашли $6r+1$ команду и они все играли между собой. Но поскольку их должно быть четное число, их максимум $6r$. Значит, у нас осталось $6(m-r)+1$ команда. По предположению индукции, в них мы можем найти $m-r+1$ команду, которые не играли между собой. Если к ним добавим t_i, то получим $m+1$ команду.

Решения пятого тура AMB, Senior

Капитанский бой. Дана сетка 5×5. Посчитайте количество пар узлов сетки, которые находятся на целом расстоянии друг от друга.



Ответ: 108.

№1. Найдите все пары действительных чисел x, y, что выполняется $x^2 + x = y^3 - y$, $y^2 + y = x^3 - x$.

Ответ: $(-1, -1), (0, 0), (2, 2), (0, -1), (-1, 0)$.

Решение. Отняв уравнения, получаем: $x^2 - y^2 = y^3 - x^3$, поэтому $(x - y)(x + y + x^2 + y^2 + xy) = 0$, поэтому:

1) Если $x = y$, то получаем $x^3 - x^2 - 2x = 0$, поэтому решения $(-1, -1), (0, 0), (2, 2)$.

2) Если $x \neq y$, то получаем $x + y + x^2 + y^2 + xy = 0$, но на основании первого уравнения имеем $y^3 + y^2 + xy = 0$, поэтому если $y = 0$, то получаем решения $(0, -1), (-1, 0)$, а если $y \neq 0$, получаем $x = -y^2 - y$, но отсюда новых решений мы не получаем.

№2. Дана клетчатая таблица $n \times n$ состоящая из клеток 1 на 1. Ильяс закрасил некоторые клетки в фиолетовый цвет, при этом закрасив хотя бы одну клетку. Докажите что таблицу можно разделить на прямоугольники по линиям клеток так, что в каждом прямоугольнике была ровно одна закрашенная клетка.

Решение. Мы утверждаем, что данное утверждение верно для произвольных прямоугольников. Будем доказывать это по индукции по числу отмеченных клеток. Базовый случай: $k = 1$ отмеченная клетка, тогда исходный прямоугольник уже удовлетворяет требованию.

Чтобы доказать утверждение для k отмеченных клеток, разобьём прямоугольник на два меньших прямоугольника, в каждом из которых содержится по крайней мере одна отмеченная клетка. По предположению индукции мы можем разбить каждый из этих меньших прямоугольников на прямоугольники с ровно одной отмеченной клеткой. Объединив оба набора таких прямоугольников, получим разбиение исходного прямоугольника на прямоугольники, в каждом из которых ровно по одной отмеченной клетке, что завершает индукционный переход.

№3. Пусть ABC – остроугольный разносторонний треугольник в котором $AB < AC$. M и N – середины сторон AB и AC соответственно. Пусть P и Q – точки лежащие на прямой MN такие, что $\angle CBP = \angle ACB$ и $\angle QCB = \angle CBA$. Описанная окружность треугольника ABP пересекает прямую AC в точке $D \neq A$, а описанная окружность треугольника AQC пересекает прямую AB в точке $E \neq A$. Докажите, что прямые BC, DP и EQ пересекаются в одной точке.

Решение. Из равенств углов следует, что $BMQC$ и $BPNC$ – равнобедренные трапеции, а значит, симметричные относительно серпера к BC. В завершение определите L как середину последнего. Поэтому

$$\angle LQC = \angle BML = \angle BAC = \angle EAC = \angle EQC$$

$$\angle LPB = \angle CNL = \angle CAB = \angle DAB = \angle DPB$$

приводящие к требуемому результату.

№4. Последовательность положительных целых чисел a_n задается начальными условиями: $a_1 = a, a_2 = b$, где a и b – произвольные положительные целые числа. Далее для всех положительных целых n выполняются следующее:

$a_{2n+1} = a_{2n} \cdot a_{2n-1}$,
$a_{2n+2} = a_{2n+1} + 4$.

Известно, что ровно m чисел из набора $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}$ являются квадратами целых чисел. Найдите наибольшее возможное значение m, среди всех пар (a, b).

Ответ: 1013.

Решение. Начнем с наблюдения, что никакие два положительных квадратных числа не отличаются на четыре.

При $n \geq 1$ имеем, что a_{2n+1} и a_{2n+2} отличаются на 4, поэтому не более одного из них является квадратом.

Для $n \geq 1$ имеем $a_{2n+2} = a_{2n}a_{2n-1} + 4$, что равно $(a_{2n-1} + 2)^2$ и поэтому всегда является квадратом.

Таким образом, $a_6, a_8, \ldots, a_{2024}$ являются квадратами, а $a_5, a_7, \ldots, a_{2025}$ – нет, что дает 1010 квадратов от a_5 до a_{2025}.

Последовательность начинается с $a, b, ab, ab + 4$. Последние два отличаются на 4, поэтому не оба являются квадратами, что подразумевает, что не более трех из первых четырех членов являются квадратами. Более того, если a и b являются квадратными числами, то ab также будет квадратом.

Таким образом, среди первых 2025 членов последовательности имеется не более 1013 квадратов. Это достигается, если (и только если) a и b оба являются квадратами.

№5. Дан остроугольный треугольник ABC в котором $AB > AC$. Пусть I – центр вписанной окружности, а Ω – описанная окружность треугольника ABC. D – основание перпендикуляра с точки A на сторону BC. AI пересекает Ω в точке $M \neq A$. Прямая проходящая через точку M, перпендикулярная AM пересекает прямую AD в точке E. Пусть F – основание перпендикуляра с точки I на высоту AD. Докажите, что $ID \cdot AM = IE \cdot AF$.

Решение. Пусть K – точка касания вписанной окружности и BC. Известный факт, что M, K, F коллинеарны. Тогда $DKIF$ – прямоугольник, поэтому $KF = ID$. Очевидно, что $IFEM$ вписан, и $\triangle AIE \sim \triangle AFM$, поэтому $AF \cdot IE = AI \cdot MF$. Задача решается после замечания $AI \cdot MF = KF \cdot AM = ID \cdot AM$, что верно по Фалесу для ΔMAF и точек I, K.

№6. У Фериде и Арай есть граф G на n вершинах. Граф G обозвал Фериде, поэтому она обиделась на граф G и хочет стереть его. Граф G помогает Арай с домашним заданием по математике, и она хочет его сохранить. Фериде может за одну операцию удалить какую-то вершину и все ребра исходящие из неё. Арай после хода Фериде для каждой вершины V потерявшей ребро создает вершину R соединенную с теми же вершинами что и вершина V. При этом все такие вершины V не соединены с R. Докажите, что Фериде сможет полностью уничтожить граф с помощью таких ходов, а Арай получит двойку по математике.

Решение. Покрасим граф в несколько цветов, так чтобы соседние вершины имели разный цвет. И пусть скопированные в процессе вершины будут иметь тот же цвет, что и оригинал. Тогда за несколько удалений Фериде может избавится от одного из цветов. Продолжая так несколько раз мы избавимся от всех цветов. То есть вершин и вовсе не останется – значит Арай получит свою двойку по математике.

№7. Пусть, $n > 1$ – натуральное число. Докажите, что любые 2^n подряд идущих целых чисел – $a, a+1, , a+2^n-1$ можно разбить на два множества по 2^{n-1} число в каждом так, чтобы для любого натурального $k < n$ сумма k-тых степеней элементов первого множества совпадала с суммой k-тых степеней элементов второго множества.

Решение. Будем доказывать индукцией по n.

База $n = 2$ очевидна – в одно множество берём числа a,$a+3$, а в другое – $a+1$,$a+2$.

Докажем, что если это верно для $n = m$, то это верно и для $n = m + 1$.

По предположению индукции мы можем разбить числа от a до $a + 2^m - 1$ на множества A_1 и B_1, причём $a \in A_1$.

Пусть, A_2 состоит из всех элементов B_1, увеличенных на 2^m и всех элементов A_1, а B_2 состоит из всех элементов A_1, увеличенных на 2^m и всех элементов B_1.

Докажем, что множества A_2 и B_2 образуют нужное нам разбиение.

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in A_2} x^k - \sum_{x\in B_2} x^k &= \sum_{x\in A_1} x^k + \sum_{x\in B_1} (x+2^m)^k - \sum_{x\in B_1} x^k \sum_{x\in A_1} (x+2^m)^k = \\
&= \sum_{x\in A_1} \left(x^k - (x+2^m)^k\right) + \sum_{x\in A_1} \left((x+2^m)^k - x^k\right) = \\
&= \sum_{x\in A_1} \left(x^k - \sum_{\ell=0}^{k} x^\ell 2^{m(k-\ell)} \binom{k}{\ell}\right) + \sum_{x\in B_1} \left(\sum_{\ell=0}^{k} x^\ell 2^{m(k-\ell)} \binom{k}{\ell} - x^k\right) = \\
&= \sum_{x\in A_1} \sum_{\ell=0}^{k-1} -x^\ell 2^{m(k-\ell)} \binom{k}{\ell} + \sum_{x\in B_1} \sum_{\ell=0}^{k-1} x^\ell 2^{m(k-\ell)} \binom{k}{\ell} = \\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1} 2^{m(k-\ell)} \binom{k}{\ell} \cdot \left(\sum_{x\in B_1} x^\ell - \sum_{x\in A_1} x^\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{k-1} 0 = 0
\end{aligned}$$

№8. В кабинете математики по кругу расположены $n \geq 3$ донеров. Сула хочет пронумеровать донеры числами $1, 2, \ldots, n$ в каком-то порядке, а затем разместить на донерах несколько мух. Как только все мухи расставлены, они начинают прыгать по часовой стрелке по следующему правилу: когда муха достигает донера с номером k, она ждет k минут, а затем перепрыгивает на соседний донер.

Каково наибольшее число мух, которых Сула может поставить на донеры так, чтобы на каждом донере всегда было не более одной мухи?

(Донер считается занятым несколькими мухами одновременно только в том случае, если они находятся на донере не менее одной минуты.)

Ответ: $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Решение. Заменим донер с номером k на k подряд идущих донеров с номером k и скажем, что теперь мухи каждую минуту летят на соседний донер.

Например, если у нас изначально стоят донеры с номерами 1,4,3,2, то теперь у нас будут донеры с номерами 1,4,4,4,4,3,3,3,2,2.

Тогда, мы хотим чтобы никакие две мухи не были на донерах с одинаковыми номерами.

Заметим, что если расстояние между двумя мухами меньше n, то они обе когда-то окажутся на донерах с номером n. Значит, расстояние между любыми двумя мухами хотя бы n.

Заметим, что у нас всего $\frac{n(n+1)}{2}$ донеров, значит мы можем поставить максимум $\frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$ мух.

Докажем, что мы всегда можем поставить $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ мух.

Пронумеруем изначальные донеры таким образом: n,1,$n-1$,2,$n-2$,3,$\ldots$,k,$n-k$,$\ldots$ и поставим мух на донеры с номерами n,1,2,3,$\ldots$,$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Тогда, расстояние между мухами на новых донерах будут $\geq n$, тогда они очевидно не окажутся на новых донерах с одинаковыми номерами.